Απειροστικός Λογισμός Ι, 7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Να βρείτε τιμές για τις σταθερές a, b, c ώστε οι γραφικές παραστάσεις των πολυωνύμων $f(x) = x^2 + ax + b$ και $g(x) = x^3 - c$ να τέμνονται στο σημείο $(1, 2)$ και να έχουν σε αυτό κοινή εφαπτόμενη.

2. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δειχθεί ότι μεταξύ δυο ριζών της f υπάρχει μια (τουλάχιστον) ρίζα της g.
β) Να δειχθεί ότι μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της g. [Σημείωση: Δυο ρίζες $a < \beta$ μιας συνάρτησης ϕ λέγονται διαδοχικές, αν μεταξύ των a, β δεν υπάρχει άλλη ρίζα της ϕ.]

3. Να γίνει πλήρης μελέτη [πεδίο ορισμού, μονοτονία και ακρότατα (τοπικά και ολικά), κυρτότητα και σημεία καμπής, ασύμπτωτες] και γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \frac{\log x}{x}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και επί. Θέτουμε $a = f(0)$, $\beta = f(1)$, $\gamma = f(\sqrt{2})$ και $\delta = f(2)$. Να εξετάσετε αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα σημεία a, β, γ, δ και, σε όσα από αυτά είναι, να υπολογιστεί η αντίστοιχη παράγωγος. [Υπόδειξη: Πρέπει να χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα παραγώγισης της αντίστροφης συνάρτησης].

5. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της ακολουθίας με τύπο $a_n = \sqrt[n]{n}$. [Υπόδειξη: Μελετήστε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^{1/x}$].

6. Δείξτε ότι η εξίσωση $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε καταλλήλως το Θεώρημα Rolle.]

7. Αν η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x+1) - f(x) \Big) = 0$.

8. Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(3x^2)}{\sin^2 x} \qquad \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\log x} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{\sin\frac{\pi}{x}}$$